
TP 11

Analyse numérique

Exercice 1 — Méthode des rectangles

1. À l'aide de la méthode des rectangles, en prenant successivement dix, cent et mille points pour la subdivision du segment $[0; 1]$, calculer une valeur approchée de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte de l'intégrale.

2. À l'aide de simulations, conjecturer la valeur de l'intégrale gaussienne suivante :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On verra en deuxième année que cette limite vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 2 — Algorithme de dichotomie

Appelons (E) l'équation $\cos(x) = x$, d'inconnue x réelle.

1. (a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $[-1; 1]$.
(b) Bonus : montrer que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-10} près de l'unique solution de (E) .

Exercice 3 — Méthode d'Euler

1. Appliquer la méthode d'Euler pour tracer une solution approchée de l'équation différentielle linéaire avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

et la comparer avec la solution exacte.

2. Appliquer la méthode d'Euler pour tracer une solution approchée de l'équation différentielle non linéaire avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, y'(x) = 1 + y^2(x) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

et la comparer avec la solution exacte (obtenue par séparation des variables).

3. À l'aide de la méthode d'Euler, tracer l'effectif N d'une population dont l'évolution est régie par le modèle logistique de Verhulst :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K} \right) N \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

On testera différentes valeurs pour K , r et N_0 .